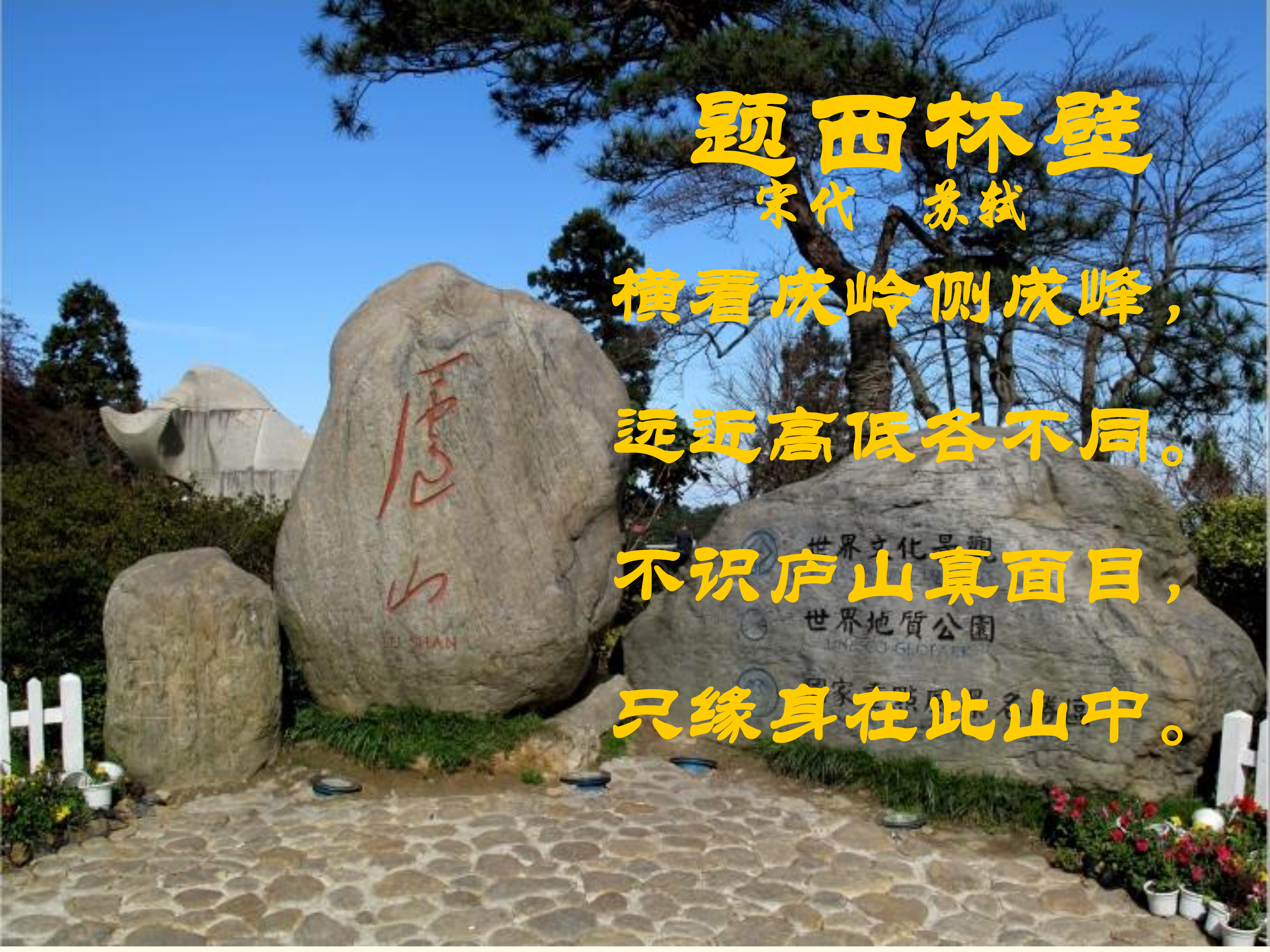


题西林壁

宋代　苏轼

横看成岭侧成峰，

远近高低各不同。

不识庐山真面目，

只缘身在此山中。

横看成岭侧成峰

横着看，山峦起伏，连绵不断；从侧面看，奇峰陡峭；

远近高低各不同

从远处看是隐天蔽日，从近处看则是危崖险岩；从高处俯瞰是深沟幽壑，从山下仰望则是重峦叠嶂；

- 从不同角度去看事物，景象各不相同。
- 要真正了解事物，就要从不同方面、不同角度去观察、分析。

如何从不同的角度分析研究同一事物呢？

第二节

偏导数与全微分

例 某厂生产甲产品x吨,乙产品y吨时,总成本为

$$C(x,y)=20x^2+10y^2-7xy-100x-358y+100(\text{元}),$$

收益函数为

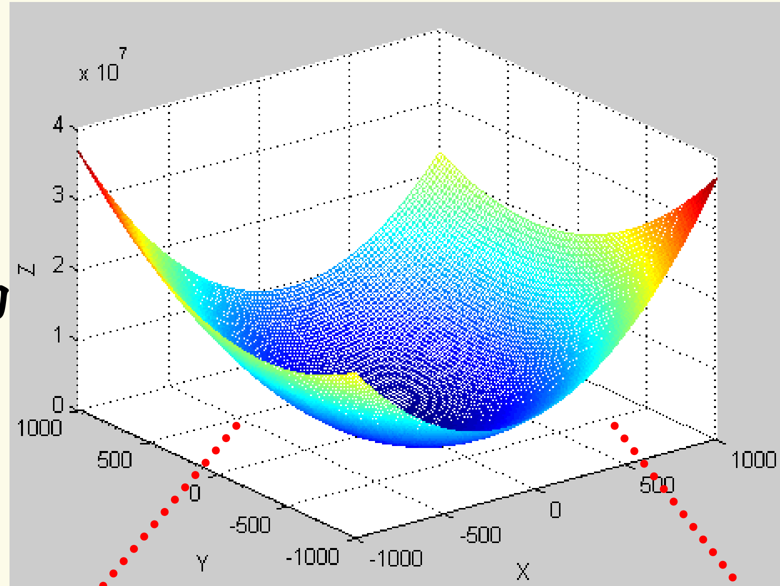
$$R(x,y)=19x^2+11y^2-7xy-50x-418y(\text{元}),$$

利润函数为

$$\begin{aligned}L(x,y)&=R(x,y)-C(x,y)\\&=-x^2+y^2+50x-60y-100(\text{元}),\end{aligned}$$

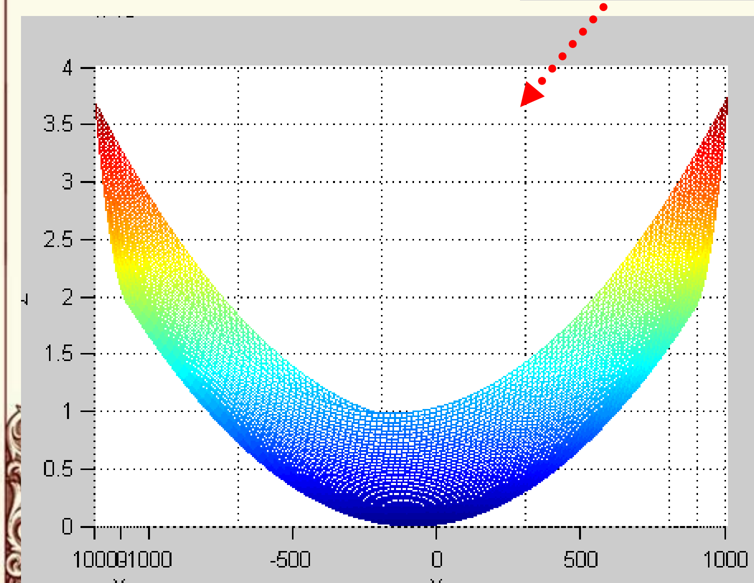
考虑总成本C最低与利润L最大?

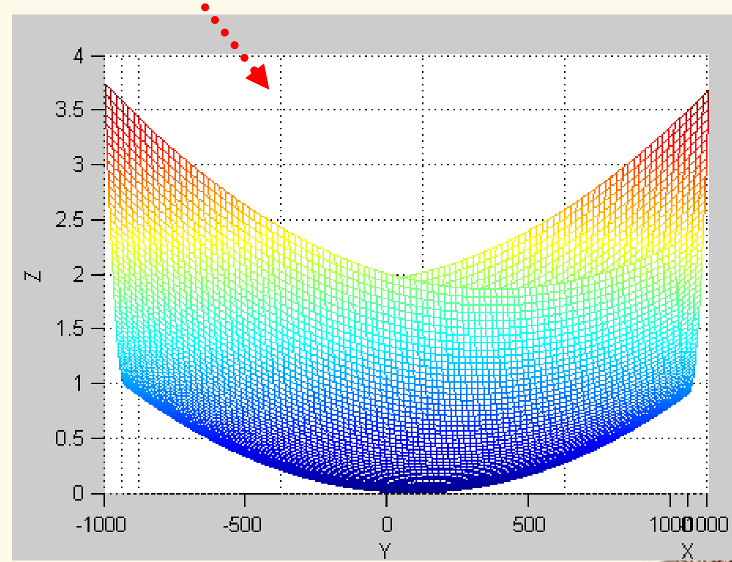
总成本: $C(x,y)=20x^2+10y^2-7xy-100x-358y+100(\text{元}),$



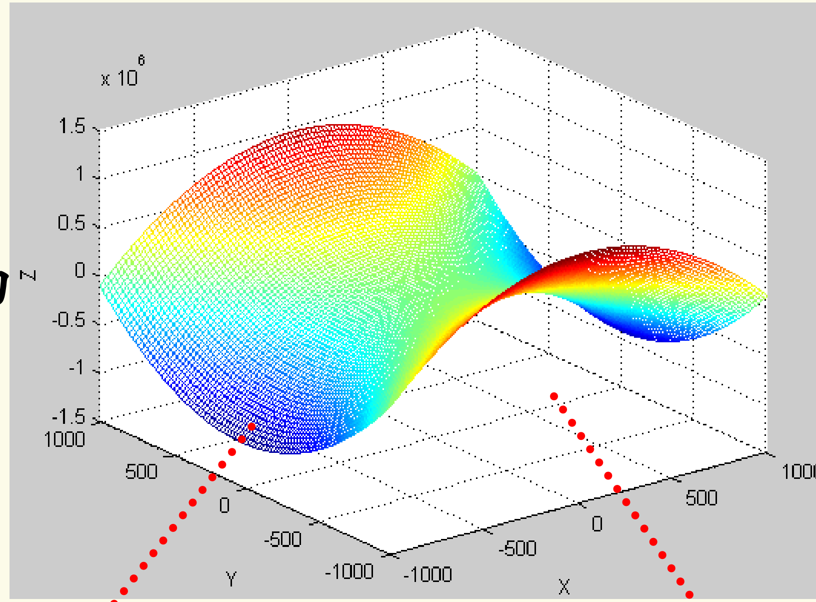
“横”看——
观察曲面沿着x轴方向变化情况（忽略y）

“侧”看——
观察曲面沿着y轴方向变化情况（忽略x）



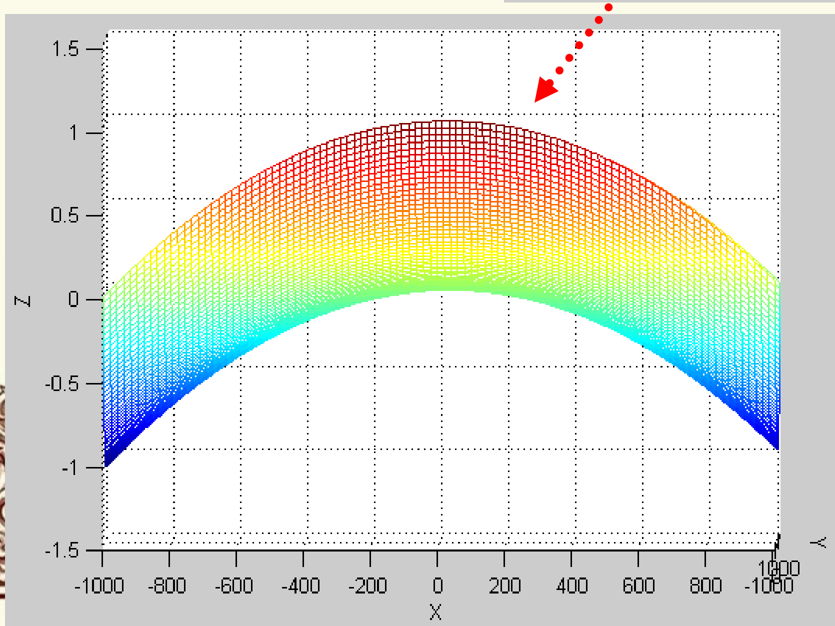


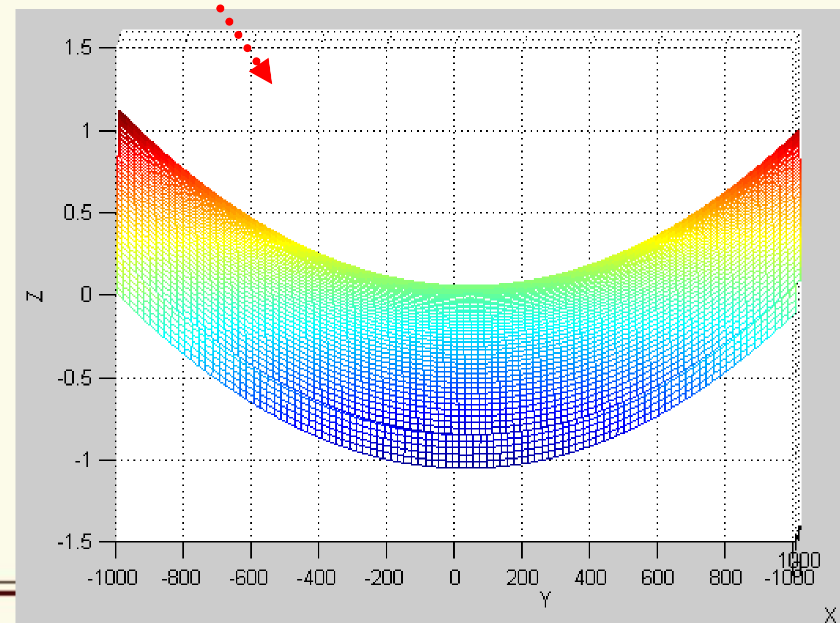
利润函数: $L(x,y) = -x^2 + y^2 + 50x - 60y - 100$(元),



"横"看——
观察曲面沿着x轴方向变化情况
（忽略y）

"侧"看——
观察曲面沿着y轴方向变化情况
（忽略x）





考虑总成本C最低与利润L最大

本质上，研究二元函数的最小值与最大值

研究角度：先固定y，研究二元函数关于x的最值

再固定x，研究二元函数关于y的最值

研究方法：先固定变量y(或x)，利用二元函数关于x(或y)的导数来判定最值

二元函数先固定变量$y(x)$，研究变量$x(y)$的导数

……………… 偏导数

一、偏导数的概念

1.偏导数的定义

定义1　设函数$z=f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$的某一邻域内有定义，将y固定为y_0，给x_0以改变量$\triangle x$，于是函数有相应改变量

$$\triangle_x z=f(x_0+\triangle x,y_0)-f(x_0,y_0)$$

$\triangle_x z$称为函数$z=f(x,y)$对x的**偏增量**(或**偏改变量**).

若极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$

存在，则称此极限值为函数$z=f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$处对x的**偏导数**，记作

$$f_x'(x_0,y_0),\ \text{或}\ \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x},\ \text{或}\ z'_x\big|_{(x_0,y_0)},\ \text{或}\ \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)}$$

类似地,可以定义函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)关于y的**偏导数**,

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

并将其记作 $f_y'(x_0,y_0)$, $\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}$, $z'_y\big|_{(x_0,y_0)}$, 或 $\dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)}$

有关偏导数的几点说明

- 偏导数记号$\partial z/\partial x$、$\partial z/\partial y$是整体记号,不能拆分;
- 求分界点、不连续点处的偏导数要用定义求。

◆ **偏导数与导数的关系:**

$$f'_x(x_0,\ y_0)=[f(x,\ y_0)]'\Big|_{x=x_0}.$$

$$f'_y(x_0,\ y_0)=[f(x_0,\ y)]'\Big|_{y=y_0}.$$

例1. 求 $z=x^2+3xy+y^2$ 在点 $(1,2)$ 处的偏导数.

解:

$$z\big|_{y=2}=x^2+6x+4$$

因为对 x 求偏导数时,把 y 看作常数,故可先把 y 的值代入,

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,\,2)}=(2x+6)\big|_{x=1}=8$$

$$z\big|_{x=1}=1+3y+y^2$$

因为对 y 求偏导数时,把 x 看作常数,故可先把 x 的值代入,

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,\,2)}=(3+2y)\big|_{y=2}=7$$

练习. 求 $z=ye^x+3xy$ 在点 $(0,1)$ 处的偏导数.

2.偏导函数

如果函数$z=f(x,y)$在区域D中的每一点(x,y)对x的偏导数 $f'_x(x,y)$ 都存在,则 $f'_x(x,y)$也是x,y的函数,称为函数$f(x,y)$对x的偏导函数,同样可以定义$f(x,y)$对y的偏导函数 $f'_y(x,y)$,它们可以分别记为

$$z'_x,\text{或 } f'_x,\ \frac{\partial f}{\partial x}\text{ 或 }\frac{\partial z}{\partial x}\text{和 } z'_y,\quad f'_y\ ,\frac{\partial f}{\partial y}\text{ 或 }\frac{\partial z}{\partial y}$$

偏导函数常简称为偏导数.

3. 偏导函数的计算

由偏导数的定义知:

(1).求函数$f(x,y)$对自变量x的偏导数, 只须将自变量y看成常数, 用一元函数的求导法则对x求导;

(2).求函数$f(x,y)$对自变量y的偏导数, 只须将自变量x看成常数, 用一元函数的求导法则对y求导.

偏导数与偏导函数的关系:

$$f'_x(x_0, y_0)=f'_x(x, y)\Big|_{x=x_0,y=y_0} .$$

$$f'_y(x_0, y_0)=f'_y(x, y)\Big|_{x=x_0,y=y_0} .$$

例2　求$z=x^2\sin 2y$的偏导函数.

解　$\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x\sin 2y$，

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=2x^2\cos 2y$.

例1'. 求$z=x^2+3xy+y^2$在点(1, 2)处的偏导数.

解: $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x+3y,\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=3x+2y$

$$\therefore\quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=2\cdot 1+3\cdot 2=8,\quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,2)}=3\cdot 1+2\cdot 2=7$$

练习　求$z=\sin(x+2y)^2$的偏导函数.

谢谢大家!